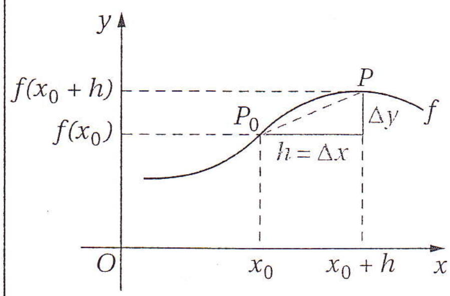
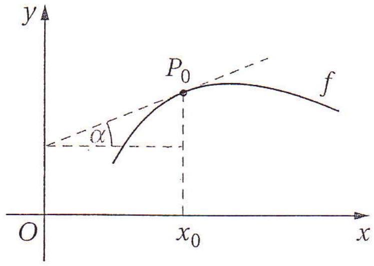
Differenzialrechnung (5)

Grundbegriffe

f Funktion; $x_0, x_0 + h \in D_f$

Differenzenquotient von f mit $y = f(x)$	$d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ bzw. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ Der Differenzenquotient gibt den Anstieg der Sekante durch die Punkte $P_0(x_0; f(x_0))$ und $P(x_0+h; f(x_0+h))$ des Graphen von f an.	
Differenzialquotient (1. Ableitung) von f an der Stelle x_0	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ $f'(x_0)$ gibt den Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ an: $f'(x_0) = \tan\alpha$ Existiert $f'(x_0)$, so heißt f **differenzierbar** an der Stelle x_0.	
1. Ableitung von f (Ableitungsfunktion)	$y' = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	
höhere Ableitungen	$y'' = [f'(x)]' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ (2. Ableitung); … $y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ (n-te Ableitung)	

Ableitungen (Ableitungsfunktionen) spezieller Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$a = \text{const.}$	0	0	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$2\tan x(1+\tan^2 x)$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x (\ln a)^2$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\frac{-1}{x^2 \cdot \ln a}$
e^x	e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Differenziationsregeln

$u = u(x)$, $v = v(x)$ differenzierbar; $c \in \mathbb{R}$

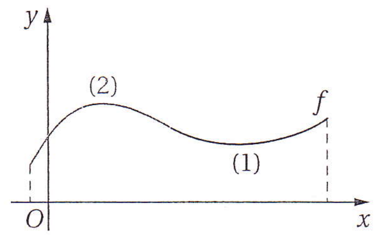
Faktorregel	$y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$	**Produktregel**	$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Summenregel	$y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$	**Quotientenregel**	$y = \frac{u}{v}$ (mit $v \neq 0$) $\Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kettenregel	$y = f[g(x)]$ bzw. $y = f(u)$ mit $u = g(x) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot g'(x)$ bzw. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
Differenziation der Umkehrfunktion	$x = g(y)$ Umkehrfunktion von $y = f(x) \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

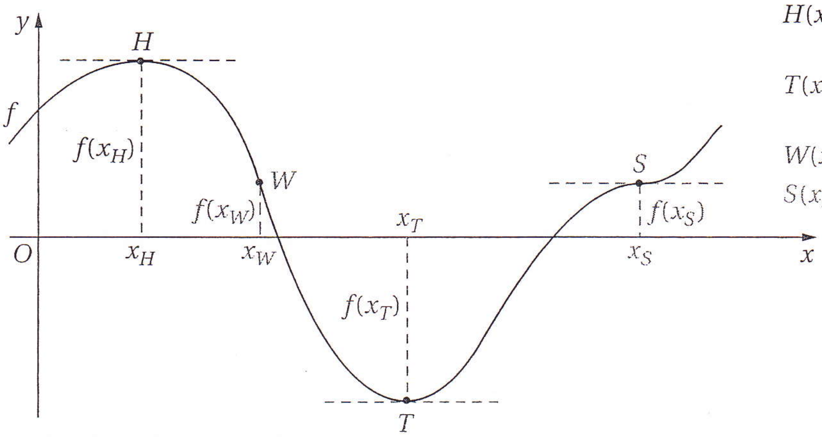
Anwendungen der Differenzialrechnung (6)

Kurvenuntersuchungen

f mindestens zweimal differenzierbar

Monotonieverhalten	$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a; b]$ $\Rightarrow$ f ist in $[a; b]$ streng monoton wachsend. $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a; b]$ $\Rightarrow$ f ist in $[a; b]$ streng monoton fallend.	
Konvex- bzw. Konkavbögen	$f''(x) > 0$ für alle $x \in [a; b]$, also f' in $[a; b]$ monoton wachsend. $\Rightarrow$ Graph von f besitzt einen Konvexbogen (1). $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a; b]$, also f' in $[a; b]$ monoton fallend. $\Rightarrow$ Graph von f besitzt einen Konkavbogen (2).	

Verhalten der Funktion an speziellen Stellen (bzw. ihres Graphen in speziellen Punkten)



$H(x_H; f(x_H))$	Hochpunkt (lokaler Maximumpunkt)
$T(x_T; f(x_T))$	Tiefpunkt (lokaler Minimumpunkt)
$W(x_W; f(x_W))$	Wendepunkt
$S(x_S; f(x_S))$	Sattelpunkt (Horizontalwendepunkt)

	notwendige Bedingung	**hinreichende Bedingung**
$f(x_H)$ ist ein lokales Maximum; x_H ist eine lokale Maximumstelle von f	$f'(x_H) = 0$	$f'(x_H) = 0$ und $f''(x_H) < 0$ bzw. $f'(x_H) = 0$ und $f'(x)$ wechselt beim Durchgang durch x_H mit wachsendem x das Vorzeichen von plus zu minus.
$f(x_T)$ ist ein lokales Minimum; x_T ist eine lokale Minimumstelle von f	$f'(x_T) = 0$	$f'(x_T) = 0$ und $f''(x_T) > 0$ bzw. $f'(x_T) = 0$ und $f'(x)$ wechselt beim Durchgang durch x_T mit wachsendem x das Vorzeichen von minus zu plus.
x_W ist eine Wendestelle von f	$f''(x_W) = 0$	$f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$
S ist ein Sattelpunkt von f	$f'(x_S) = 0$ $f''(x_S) = 0$	$f'(x_S) = 0$ und $f''(x_S) = 0$ und $f'''(x_S) \neq 0$