Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Übersicht LK LIE/10

1 Mengen, Ereignisse, Aussagen

1.1 Grundlegendes

1.1.1 Mengenbilder (VENN-Diagramme), Symbole, Sprechweisen

1.1.2 äquivalente Terme

1.2 Ergänzungen

1.2.1 einfache

1.2.2 komplexe

2 Vier-Felder-Tafeln

2.1 für Ereignisse

2.2 für absolute Häufigkeiten H

2.2.1 einprägsames Beispiel

2.2.2 allgemein

2.3 für Wahrscheinlichkeiten $P = P_S$, P_A …/relative Häufigkeiten $h = h_S$, h_A …

2.3.1 einprägsames Beispiel

2.3.2 allgemein

2.4 Zusammenhang zwischen abs. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (bisher)

3 Baumdiagramm und „umgekehrtes“ Baumdiagramm für Wahrscheinlichkeiten/relative Häufigkeiten

3.1 Problem

3.2 Beispiel

3.2.1 Baumdiagramm

3.2.2 „umgekehrtes“ Baumdiagramm

3.3 allgemein

3.3.1 Baumdiagramm

3.3.2 „umgekehrtes“ Baumdiagramm

3.3.3 kombiniertes Baumdiagramm

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

1 Mengen, Ereignisse, Aussagen

1.1 Grundlegendes

1.1.1 Mengenbilder (VENN-Diagramme), Symbole, Sprechweisen

siehe Arbeitsblatt (aus: Lambacher-Schweizer alt, S. 69)

1.1.2 äquivalente Terme

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

1.2 Ergänzungen

1.2.1 einfache

$$A \cup \overline{A} = S, \; B \cup \overline{B} = S$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \; B \cap \overline{B} = \emptyset$$

1.2.2 komplexe

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$
$$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$$

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$$
$$(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$$

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$
$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{B}$$
$$(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$$

Bemerkung:

a) zur Begründung mittels graphischer Darstellung siehe 2.1
b) zur Anwendung siehe 4.3.3

2 Vier-Felder-Tafeln:

2.1 für Ereignisse

siehe Arbeitsblatt (mit Excel)

2.2 für absolute Häufigkeiten H

2.2.1 einprägsames Beispiel

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	10	20	30
$\overline{A}$	30	40	70
$\sum$	40	60	100

Bemerkung:

a) Beispiel im Sachzusammenhang: siehe 5.2
b) Man erhält beliebig viele weitere Beispiele, indem man alle Häufigkeiten in der Tabelle mit dem gleichen Faktor multipliziert.

2.2.2 allgemein

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$H(A \cap B)$	$H(A \cap \overline{B})$	$H(A)$
$\overline{A}$	$H(\overline{A} \cap B)$	$H(\overline{A} \cap \overline{B})$	$H(\overline{A})$
$\sum$	$H(B)$	$H(\overline{B})$	$H(S)$

Bemerkung:

$H(A) = |A| =$ Anzahl der Elemente von A usw.

2.3 für Wahrscheinlichkeiten $P = P_S, P_A \ldots$/relative Häufigkeiten $h = h_S, h_A \ldots$

2.3.1 einprägsames Beispiel (vgl. 2.2.1)

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	0,1 = 10 %	0,2 = 20 %	0,3 = 30 %
$\overline{A}$	0,3 = 30 %	0,4 = 40 %	0,7 = 70 %
$\sum$	0,4 = 40 %	0,6 = 60 %	1 = 100 %

2.3.2 allgemein

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
$\sum$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	$P(S) = 1$

2.4 Zusammenhang zwischen abs. Häufigkeit, rel. Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (bisher)

$$P(A) = P_S(A) = \frac{H(A)}{H(S)} = \frac{|A|}{|S|} \quad \text{usw.,} \quad h(A) \approx P(A)$$

Bemerkung:

Der Index – in diesem Fall S – bezieht sich auf die jeweilige (Teil-)Ergebnismenge als Grundmenge. Wenn kein Index angegeben ist, ist die Grundmenge stets die maximale Ergebnismenge, deren Teilmengen die Ereignisse sind (vgl. 4.1.1).

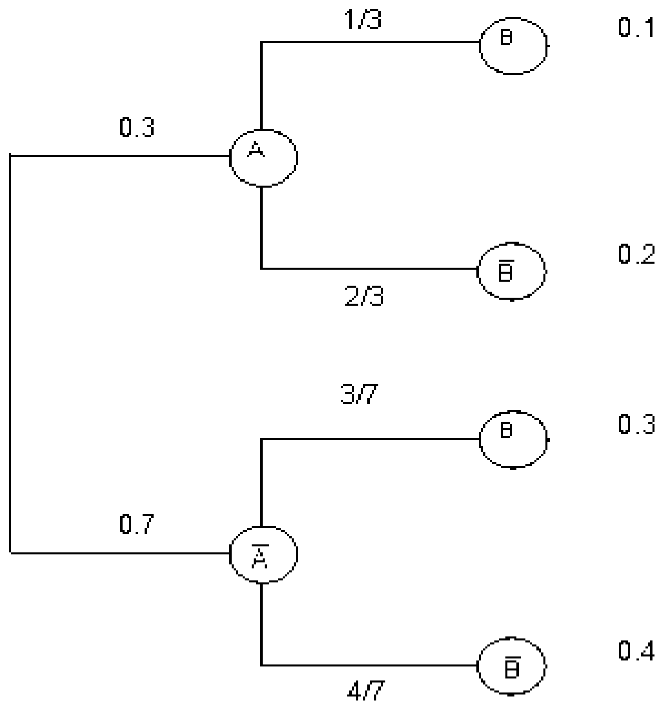
3 Baumdiagramm und „umgekehrtes“ Baumdiagramm für Wahrscheinlichkeiten/relative Häufigkeiten

3.1 Problem

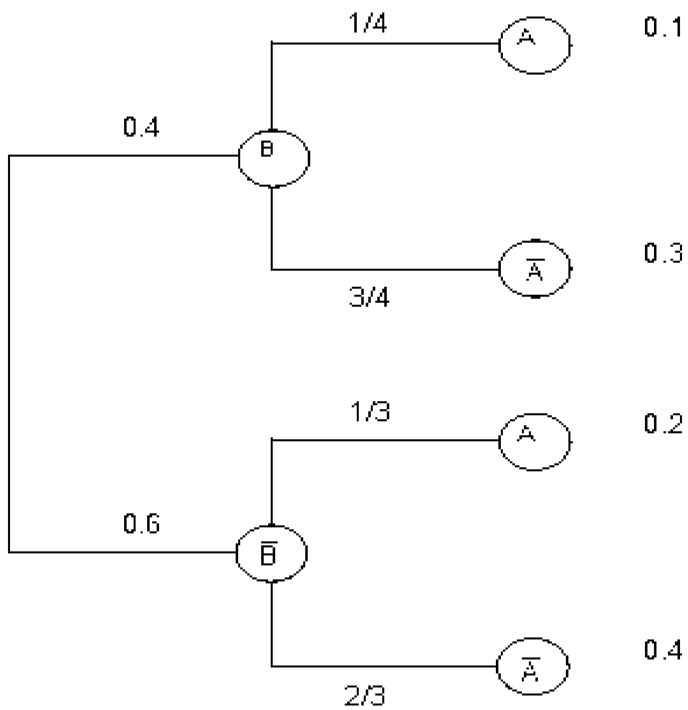
Darstellung einstufiger Experimente – zunächst nicht sachgemäß, aber mit Hilfe eines „Tricks“ sehr anschaulich und effektiv - als zweistufige Experimente!

3.2 Beispiel

3.2.1 Baumdiagramm:

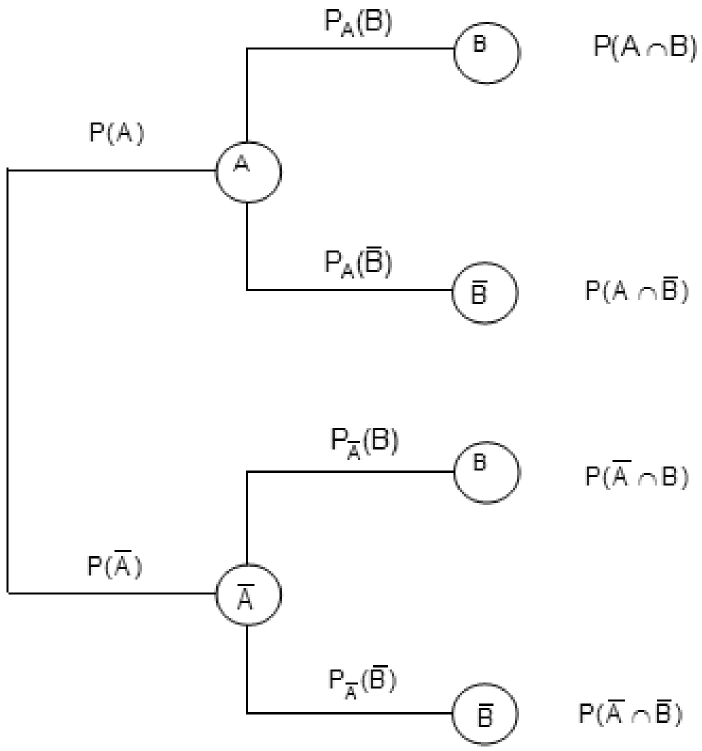


3.2.2 „umgekehrtes“ Baumdiagramm:

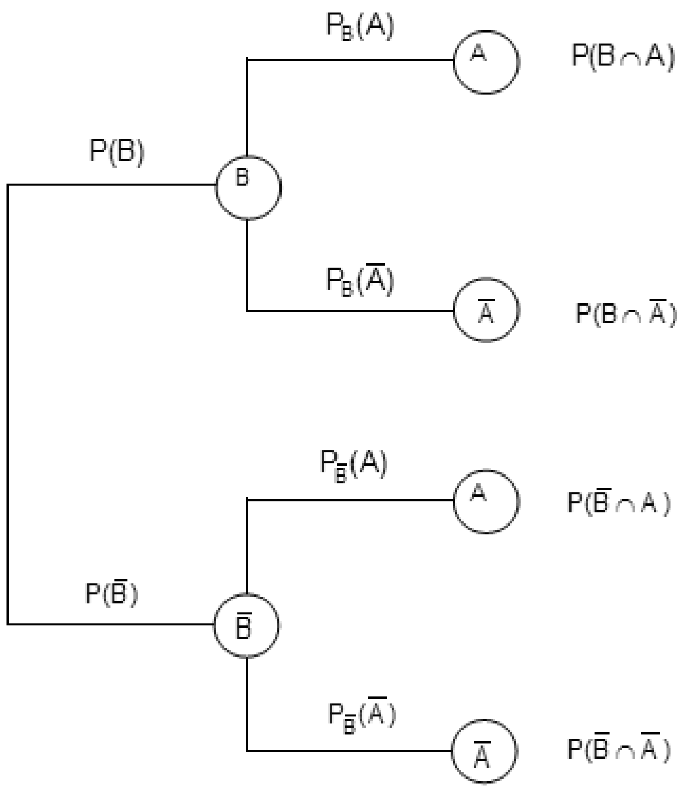


3.3 allgemein

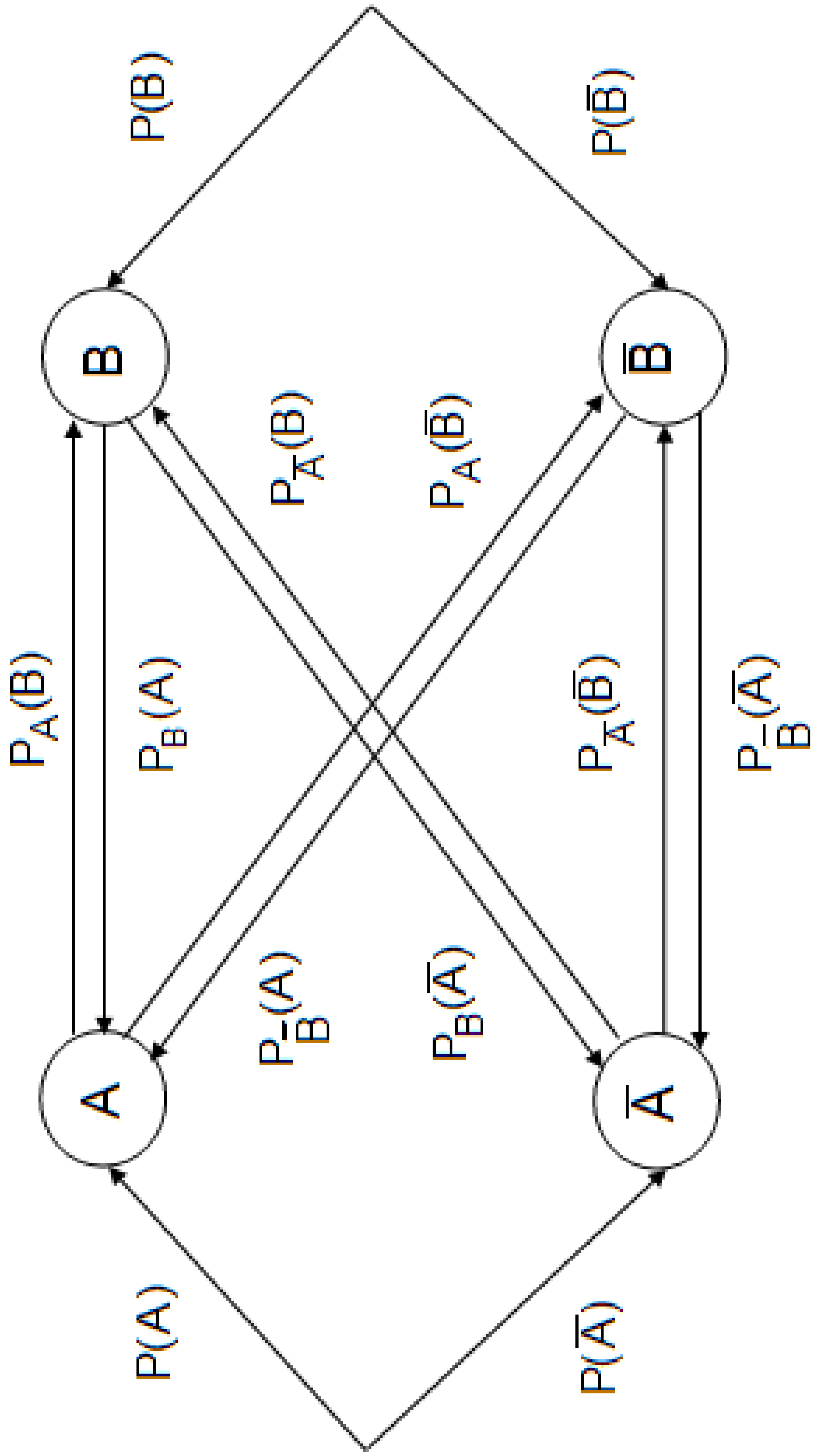
3.3.1 Baumdiagramm:



3.3.2 „umgekehrtes“ Baumdiagramm:



3.3.3 kombiniertes Baumdiagramm:



4 Formeln für Wahrscheinlichkeiten

4.1 Definitionen

4.1.1 Definition der „bedingten Wahrscheinlichkeit (eines Ereignisses)“:

$$\boxed{P_B(A) = P_B(A \cap B) = \frac{H(A \cap B)}{H(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ wenn } |B| \neq 0,\ P(B) \neq 0}$$

Es gelten analoge Formeln …

4.1.2 Definition der „(Un-)Abhängigkeit (von 2 Ereignissen)“:

A heißt von B „unabhängig“ genau dann, wenn gilt: $P_A(B) = P(B)$.

Bemerkung:

Wenn A unabhängig von B, dann auch B unabhängig von A.

4.2 bekannte „Sätze“

4.2.1 spezieller Additionssatz (für disjunkte/sich ausschließende Ereignisse):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \varnothing$

4.2.2 allgemeiner Additionssatz:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4.2.3 Satz vom Gegenereignis:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A),\ P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1$

4.3 Sätze im Zusammenhang mit der „Vier-Felder-Tafel“/mit dem Baumdiagramm:

4.3.1 allgemeiner Multiplikationssatz:

$$\boxed{\text{Wenn } P(A) \neq 0, \text{ dann } P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B).}$$

Es gelten analoge Sätze/Formeln …

4.3.2 Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse:

Wenn A, B unabhängig, dann $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Es gelten analoge Sätze/Formeln …

4.3.3 Satz von der „Totalen Wahrscheinlichkeit“:

> Wenn $P(A) \neq 0$ und $P(\overline{A}) \neq 0$, dann $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$

Es gelten analoge Sätze/Formeln …

Beweis:

$P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B))$ mit $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$ 1.2.2

$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ 4.2.1

$= P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$ 4.3.1

4.3.4 „Satz von BAYES“ (1702-1761):

> Wenn $P(A) \neq 0$, $P(\overline{A}) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$, dann $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P_A(B)$

Es gelten analoge Sätze/Formeln …

Beweis:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ 4.3.1

$P(B \cap A) = P(B) \cdot P_B(A)$ 4.3.1 (analog)

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$ $A \cap B = B \cap A$ (KG)

$P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$ einsetzen

$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P_A(B)$ $P(B) \neq 0$ lt. Vorauss.

4.3.5 Bemerkung:

In Anwendungen wird oft eine Kombination von 4.3.3 und 4.3.4 benötigt. Dabei genügen 3 Angaben, um alle 12 (!) vorkommenden Terme/Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen!

4.4 Zusammenstellung der Formeln in der Vier-Felder-Tafel (vgl. 2.3.2) und in dem kombinierten Baumdiagramm (vgl. 3.3.3) unter Verwendung analoger Formeln

4.4.1 Zum Multiplikationssatz (vgl. 4.3.1) und Satz von BAYES (vgl. 4.3.4):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = P(B) \cdot P_B(\overline{A})$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A})$$

4.4.2 Zum Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. 4.3.3):

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{A}) = P(B) \cdot P_B(\overline{A}) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$P(\overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B} \cap A) + P(\overline{B} \cap \overline{A})$$

5 weitere Beispiele

5.1 einfache Zahlenbeispiele

5.1.1 Gib die fehlenden 9 (!) Wahrscheinlichkeiten an:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	0,3		0,8
$\overline{A}$		0,1	
$\sum$			1

5.1.2 Gib die fehlenden 9 (!) Wahrscheinlichkeiten an:

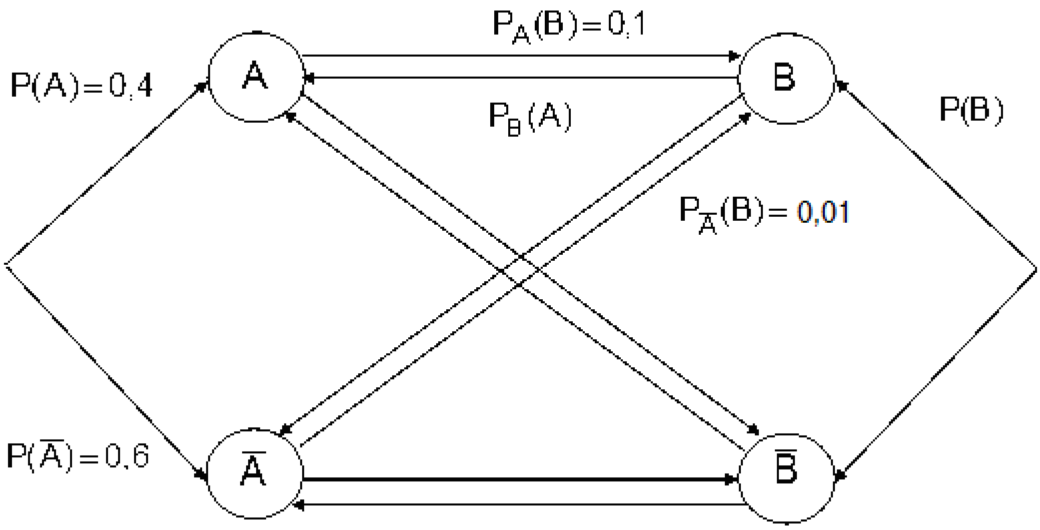
	B	$\overline{B}$	$\sum$
A		0,25	
$\overline{A}$			0,625
$\sum$		0,375	1

5.2 Anwendung in Sachzusammenhängen

5.2.1 Abitur 2007, M HT 7, Teilaufgabe e)

A: Person kennt W.	$P(A) = 0{,}4$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$
B: Person kauft W.	$P_A(B) = 0{,}1$	$P_{\overline{A}}(B) = 0{,}01$

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A			0,4
$\overline{A}$			0,6
$\sum$			1



$$P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B) \qquad 4.3.4$$

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \qquad 4.3.3$$

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$

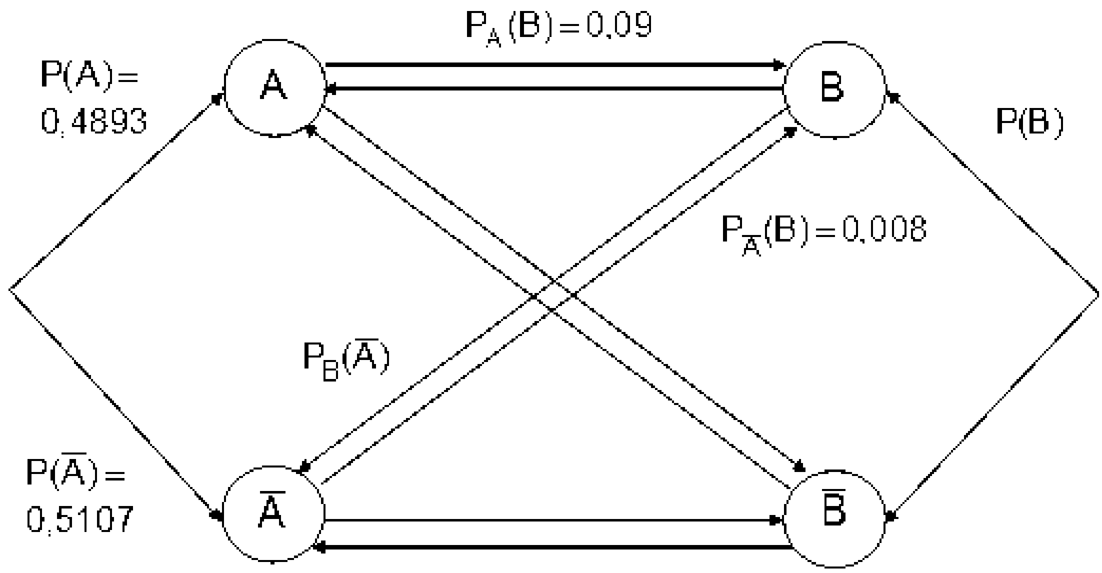
$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1}{0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}01} = \frac{0{,}04}{0{,}046} = 0{,}8695\ldots \approx 87{,}0\ \%$$

5.2.2 Abitur 2008, M LK 8, Teilaufgabe b)

A: männliche Person $\quad P(A) = 0{,}4893 \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}5107$

B: Person mit Sehschwäche $\quad P_A(B) = 0{,}09 \quad P_{\overline{A}}(B) = 0{,}008$

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A			0,4893
$\overline{A}$			0,5107
$\sum$			1



$P(B) \cdot P_B(\overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$ 4.3.4 (analog)

$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$ 4.3.3

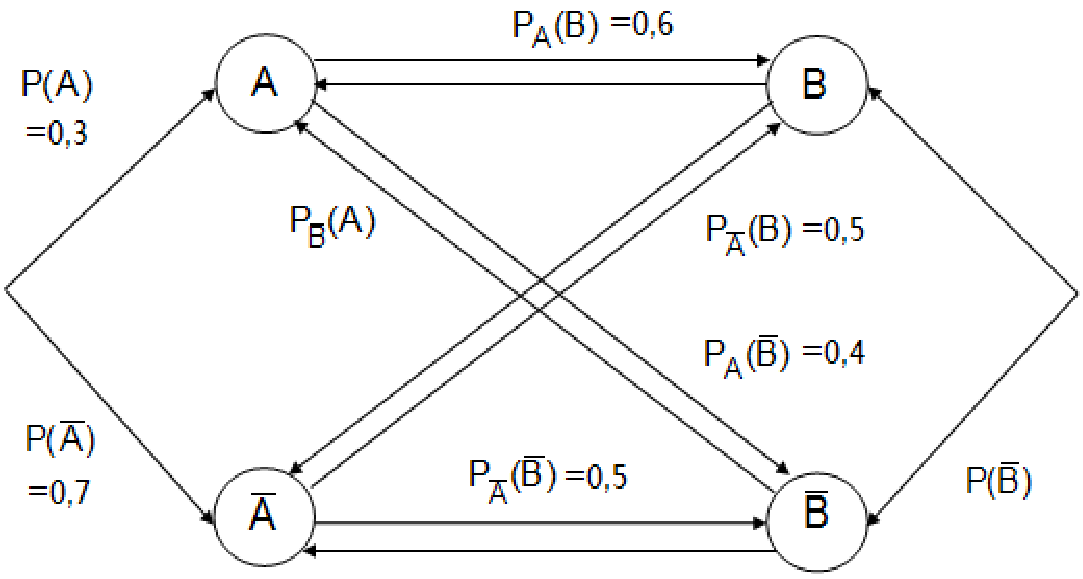
$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$

$$= \frac{0{,}5107 \cdot 0{,}008}{0{,}4893 \cdot 0{,}09 + 0{,}5107 \cdot 0{,}008} = 0{,}0848\ldots \approx 8{,}5\ \%$$

5.2.3 Abitur 2009, M LK HT 7, Teilaufgabe b1)

A: Jungendlicher	P(A) = 0,3	$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}7$
B: zufrieden	$P_A(B) = 0{,}6$	$P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A			0,3
$\overline{A}$			0,7
$\sum$			1



$P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A) = P(A) \cdot P_A(\overline{B})$ 4.3.4 (analog)

$P(\overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})$ 4.3.3 (analog)

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) \cdot P_A(\overline{B})}{P(A) \cdot P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})}$$

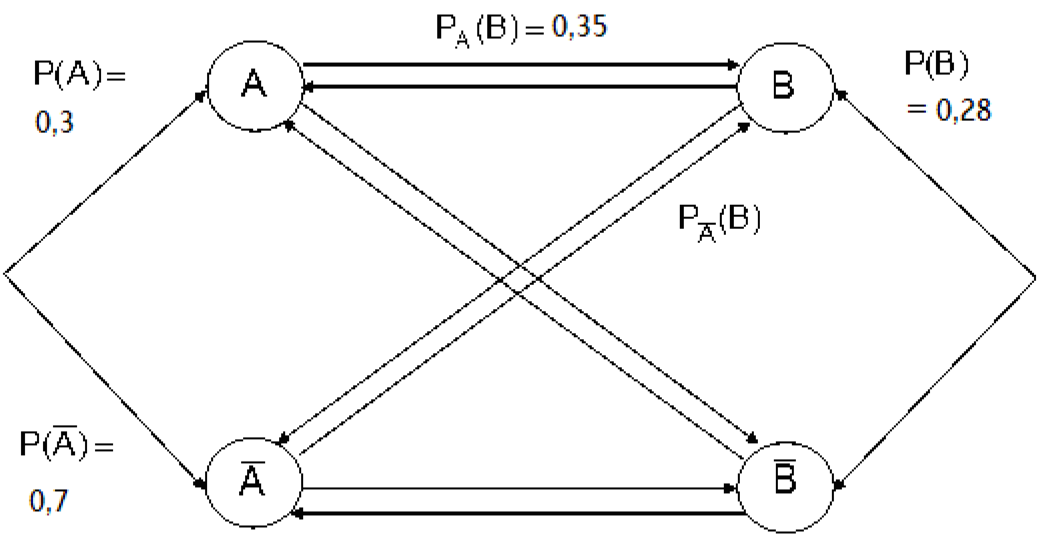
$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}5} = 0{,}2553\ldots \approx 25{,}5\ \%$$

2.4 Abitur 2009, M LK HT 7, Teilaufgabe b2)

A: Jungendlicher $\quad P(A) = 0{,}3 \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}7$

B: Raucher $\quad P_A(B) = 0{,}35 \quad P(B) = 0{,}28$

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A			0,3
$\overline{A}$			0,7
$\sum$	0,28	0,72	1



$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \qquad 4.3.3$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B) - P(A) \cdot P_A(B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}28 - 0{,}3 \cdot 0{,}35}{0{,}7} = 0{,}25 = 25{,}0\ \%$$